



TITLE:

Some Remarks Concerning Demazure's Construction of Normal Graded Rings (可換環論の 研究)

AUTHOR(S):

渡辺, 敬一

CITATION:

渡辺, 敬一. Some Remarks Concerning Demazure's Construction of Normal Graded Rings
(可換環論の研究). 数理解析研究所講究録 1980, 374: 95-107

ISSUE DATE:

1980-02

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/104723>

RIGHT:

Some Remarks concerning Demazure's Construction of Normal Graded Rings.

都立大・理

渡辺敬一

k を体, $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を k 上有限生成であるような, normal graded ring とする. R をある「幾何的」な情報で表し, その情報を用いて R の「環論的」な性質を記述するという事は種々の例を作る場合や, ある性質をもつ R をすべて分類する場合などに非常に有効である. 実際, 森重文氏は [M] に於て R が factorial になる場合を考え, 代数閉体上の二次元 factorial graded domain をすべて分類した. また, Pinkham ([P]) は \mathbb{C} 上の任意の二次元 graded normal domain が smooth curve X , X 上の ample invertible sheaf \mathcal{L} , 有限群 $G \subset \text{Aut}(X)$ において, $(\bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n}))^G$ という形に書ける事を示した.

最近の Demazure の仕事 [D] は任意の normal graded domain (k 上の) が, ある ^{normal} projective variety X と X 上の「 \mathbb{Q} -係数 Weil divisor」 D を用いて記述できる事を示した. また, この記述法は, R の環論的な性質を記述するのにも大変 (6頁参照)

便利である。本稿の目的は、この記述法を R の divisor class group の計算, R が Macaulay 環又は Gorenstein 環になる場合の決定, R が rational singularity をもつための条件の考察などに応用する事である。

§1. $R(X, D)$ の定義と, divisor class group の計算.

本稿を通じて, 次の記号を使う.

記号. \bullet k は体とある. (k は固定して考える).

- \bullet X は k 上の normal irreducible projective scheme とする.
($\dim X \geq 1$ とする).
- \bullet $k(X)$ を X の有理函数体とする.
- \bullet $\text{In}^1(X)$ を X の codim. 1 の irred closed subvariety の集合とする.
- \bullet $\text{Div}(X)$ を X の Weil divisor たちのなす群とする.
($\text{In}^1(X)$ 上の free Abelian group).
- \bullet $\text{Div}(X, \mathbb{Q}) = \text{Div}(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} 係数 Weil divisor の群)
 $E = \sum x_v \cdot V$, $E' = \sum x'_v \cdot V$ のとき, $E \geq E' \Leftrightarrow x_v \geq x'_v$ ($\forall V \in \text{In}^1(X)$)
 $\lfloor E \rfloor = \sup \{ Z \in \text{Div}(X); Z \leq E \} = \sum [x_v] \cdot V$ ($[x_v]$ は x_v の整数部分),
 $\mathcal{O}_X(E) = \mathcal{O}_X(\lfloor E \rfloor)$ とおく. (const. sheaf $k(X)$ の subsheaf

と考える)。

以後, 次の条件をみたす $D = \sum \frac{p_v}{q_v} \cdot V \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$ を fix する。 ($p_v, q_v \in \mathbb{Z}$, $q_v > 0$, $(q_v, p_v) = 1 \quad \forall V \in \text{Im}^1(X)$)。

(A) $\exists N > 0$ (positive integer), ND は ample Cartier divisor.

D, p_v, q_v, N は断りなしに, 以上の意味に用いる事にする。

$$R = R(X, D) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n \subset \mathbb{R}(X)[T] \quad (T: \text{不定元})$$

(条件 (A) より, $\text{Proj}(R) \cong X$ である。)

$$\mathfrak{m} = R_+ = \bigoplus_{n > 0} H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n$$

$$C = C(X, D) = \text{Spec}_X \left(\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{O}_X(nD) \cdot T^n \right)$$

$$C^+ = C^+(X, D) = \text{Spec}_X \left(\bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{O}_X(nD) \cdot T^n \right)$$

C^+ は X 上の "line bundle" の一般化で, C は C^+ より, "0-section" $S^+ \cong X$ を除いた C の open subvariety である。

一般論により, canonical map,

$$\Psi: C^+ \longrightarrow \text{Spec}(R)$$

が存在する。 Ψ は C と $\text{Spec}(R) \setminus \{\mathfrak{m}\}$ との同型をひきおこし, S^+ を一点 $\{\mathfrak{m}\}$ に contract する。 C, C^+ は X へ projection π, π^+ をもつ。 π, π^+ による一点の fibre は reduced structure をとると, それぞれ G_m, \mathbb{A}^1 と同型である。

$\text{Spec}(R), C, C^+$ は grading により引きおこされる G_m -action をもち, Ψ はその action と compatible である。

$V \in \text{Im}^1(X)$ に対し, $F_V = \pi^1(V)_{\text{red.}} \in \text{Im}^1(C)$ とおく。

$\text{Cl}(R)$, $\text{Cl}(C)$ は R , C の divisor class group を表わす。また, $\text{HDiv}(R)$ で, R の homogeneous divisor 全体, $\text{HIm}^1(C)$ で, G_m -action により stable であるような C の codim. 1 の irred. closed subvariety 全体を表わす。

$P(R)$, $P(C)$ は R , C の principal divisor たちのなす群とする。 $\text{Cl}(R) = \text{Div}(R)/P(R)$, $\text{Cl}(C) = \text{Div}(C)/P(C)$ である。例により, HP は "homogeneous principal divisor" をあらわす。

$\text{Cl}(R)$ を計算するに当って必要な事柄を列挙して行こう。

(1) $\dim R = \dim X + 1 \geq 2$, $C \cong \text{Spec}(R) \setminus \{m\}$ だから, $\text{Cl}(R) \cong \text{Cl}(C)$ である。また, graded ring だから, $\text{Cl}(R) \cong \text{HDiv}(R)/\text{HP}(R)$ で与えられる ([S], Proposition 1.7).

(2) ([D], 2.6, 2.8 参照) 対応 $V \mapsto F_V$ は $\text{Irr}^1(X)$ と, $\text{HIrr}^1(C)$ との bijection を与える。また, π に対応する

$$\pi^*: \text{Div}(X) \longrightarrow \text{Div}(C)$$

は $\pi^*(V) = q_V \cdot F_V$ ($V \in \text{Irr}^1(X)$) で与えられる。特に,

$$\pi^*(D) = \sum p_V \cdot V \in \text{Div}(C).$$

$$\text{Div}(X, D) = \left\{ \sum r_V \cdot V \in \text{Div}(X, \mathbb{Q}) \mid q_V \cdot r_V \in \mathbb{Z} \ (\forall V \in \text{Irr}^1(X)) \right\}$$

とおくと, π^* により, $\text{Div}(X, D) \xrightarrow{\sim} \text{HDiv}(C)$ である。

また, $\text{Div}(X, D) \xrightarrow{\sim} \text{HDiv}(R)$ (π^* と $(\Psi^*)^{-1}$ の合成) は, $E \mapsto \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(E + nD)) \cdot T^n$ で与えられる。

(3) $Q(R) = k(C) = k(X)(T)$ ($Q(R)$ は R の商体). また, $Q(R)$ の homogeneous element は $f \cdot T^n$ ($f \in k(X)$, $n \in \mathbb{Z}$) の形に表わされる. 従って, $HP(R) \cong P(X) + \mathbb{Z} \cdot \text{div}(T)$ である.

(4). ([DJ], 2.9) $\text{div}(T) = \pi^*(D) = \sum p_v \cdot V \in \text{Div}(C)$.

以上の事柄をまとめると次の定理に到達する.

定理 1. $\mathcal{C}(R)$ は次の exact sequence により与えられる.

$$0 \rightarrow \mathbb{Z} \xrightarrow{\theta} \mathcal{C}(X) \rightarrow \mathcal{C}(R) \rightarrow \text{Coker}(\alpha) \rightarrow 0$$

但し, $\theta(1) = L \cdot D$ ($L = \text{LCM}\{q_v; V \in \text{Irr}^1(X)\}$) また, α は $\alpha: \mathbb{Z} \rightarrow \bigoplus_v \mathbb{Z}/q_v \mathbb{Z}$, $\alpha(1) = (p_v \pmod{q_v})_v$ で与えられる.

系. R が factorial $\Leftrightarrow \begin{cases} \mathcal{C}(X) \text{ は } LD \text{ で生成され, かつ } q_v \text{ たち} \\ \text{は二つずつ互いに素である.} \end{cases}$

定理 1 の証明は次の exact sequence に snake lemma を適用すれば得られる.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & P(X) & \longrightarrow & \text{Div}(X) & \longrightarrow & \mathcal{C}(X) \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow & & \downarrow \pi^* & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & HP(C) \cong HP(R) & \longrightarrow & H\text{Div}(C) \cong \text{Div}(X, D) & \longrightarrow & \mathcal{C}(C) \cong \mathcal{C}(R) \longrightarrow 0 \end{array}$$

定理 1 は本質的に [M] にあらわれていると思われる. k が代数閉体のとき, $\dim R = 2$ なる factorial graded domain を探すためには, $X = \mathbb{P}_k^1$, $D = \sum_{i=1}^n \frac{p_i}{q_i} P_i$ で, 1°. q_i たちは二つずつ互いに素, 2°. $(\prod_{i=1}^n q_i) \cdot (\sum_{i=1}^n \frac{p_i}{q_i}) = 1$ なるものを求めれば良

ゝ。 $n \geq 2$ のとき, $R(X, D)$ が次数 $(\prod_{i=1}^n q_i)/q_i$ ($i=1, \dots, n$) の n 個の元で生成されているという事を確かめる事ができる。
(勿論, 得らるる結果は [M] Th 5.1 と一致する。)

ここで, Demazure の基本定理を書いておこう。

定理 ([D], 3.5). $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ が k 上有限生成な normal graded domain とする。 $0 \neq T \in Q(R)$ を $\deg(T) = 1$ なる homogeneous element とするとき, $\exists_1 D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$ (但し, $X = \text{Proj}(R)$), $R_n = H^0(X, \mathcal{O}_X(nD)) \cdot T^n$ ($\forall n \geq 0$).

§ 2. R の local cohomology group の計算. R が Macaulay 環, Gorenstein 環になるための条件.

環 R の depth, dualizing module などはずべて, R の m に関する local cohomology によって決定される。従って, $H_m^q(R)$ ($q \geq 0$) を計算する。 R は normal だから, $H_m^0(R) = H_m^1(R) = 0$ である。また, $\dim R = \dim X + 1 = d$ とおく事にする。

命題 1. $H_m^q(R)$ は $q \geq 2$ のとき graded R -module として $\bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{q-1}(X, \mathcal{O}_X(nD))$ と canonical に同型である。

(証明) [HR, §5] に於て, $H_m^0(R) \cong \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^{d-1}(X, \widetilde{R}(n))$ が示されている。従って $\widetilde{R}(n) \cong \mathcal{O}_X(nD)$ on X と示せば良いが, これは条件 (A) を使って $\widetilde{R}(n)$ の定義より出る。

系. $\text{depth } R = q+1$, 但し, $q = \min \{i > 0 \mid H^i(X, \mathcal{O}_X(nD)) \neq 0 \text{ } \exists n \in \mathbb{Z}\}$

系. R が Macaulay 環 $\Leftrightarrow H^i(X, \mathcal{O}_X(nD)) = 0, 0 < i < d-1, \forall n \in \mathbb{Z}$.

例. $X = \mathbb{P}^n$ のとき, $R(X, D)$ は任意の $D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$ に対して Macaulay ring である。一方, X が smooth rational ruled surface の場合, $D \in \text{Div}(X)$ に対しては $R(X, D)$ は Macaulay 環だが, $D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$ に対しては $R(X, D)$ が Macaulay 環でないような例ができる。

次に, R の canonical module K_R (又は canonical class $\text{cl}(K_R)$) を計算しよう。 R が Gorenstein 環 $\Leftrightarrow R$ は Macaulay 環かつ $\text{cl}(K_R) = 0$ in $\text{cl}(R)$ である。なお, $K_R = (H_m^d(R))^*$ で与えられる事を思い出そう。(注. 一般に graded R -module $M = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n$ に対し, $M^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} M_n^*$ 但し, $M_n^* = \text{Hom}_R(M_{-n}, k)$. [GW], (1.2), (2.1.2) 参照).

定理 2. $K_R = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$

但し, K_X は X の canonical divisor, $D' = \sum \frac{q_V - 1}{q_V} \cdot V \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$.

系. R が Macaulay 環 のとき,

R が Gorenstein 環 $\Leftrightarrow \exists a = a(R) \in \mathbb{Z}, K_X + D' - aD \in P(X)$.

(定理2の証明) 命題1と Serre duality により,

$$(K_R)_n = (H_m^d(R)_{-n})^* \cong H^{d-1}(X, \mathcal{O}_X(-nD))^* \cong \text{Hom}_{\mathcal{O}_X}(\mathcal{O}_X(-nD), \mathcal{O}_X(K_X)) \\ \cong H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X - L^{-n}D)). \quad -L^{-n}D = L^nD + D' \text{ に注意すると,}$$

$(K_R)_n = H^0(X, \mathcal{O}_X(K_X + D' + nD))$ を得る。この同型は R の homogeneous element による乗法と compatible である事より定理2を得る。系はこの事と $\text{cl}(R)$ の考察によりすぐ得られる。

(注) [GW] (3.1.4) に於て, R の不変量 $a(R)$ を

$$a(R) = -\min \{m \mid (K_R)_m \neq 0\} = \max \{m \mid H_m^d(R)_m \neq 0\}$$

として定義したが, $K_X + D' = aD + \text{div}_X(f)$ ($f \in k(X)$) となるとき, この a は上の $a(R)$ と一致する。

(注) R が Macaulay 環のとき, $R^{(n)}$ も Macaulay 環である事から $X = \text{Proj}(R)$ も Macaulay scheme である事はすぐわかるが, R が Gorenstein 環であっても X は Gorenstein scheme とは限らない。例えば $R = k[U, V, W]$, $\deg U = 1 = \deg V$, $\dim W = n \geq 2$ とおくとき, X は特異点を一つもち, $n \geq 3$ のときその特異点は Gorenstein でない。

§3. Rational singularity であるための判定法.

この § では $\text{ch}(k) = 0$ とする。

一般に variety Y が rational singularity しかもたない

$\Leftrightarrow \exists \text{ resolution } \pi: \tilde{Y} \rightarrow Y, R^q \pi_* (\mathcal{O}_{\tilde{Y}}) = 0 \ (\forall q > 0), \pi_* \mathcal{O}_{\tilde{Y}} = \mathcal{O}_Y.$

$\text{Spec}(R)$ が rational singularity しかもたぬとき, 単に " R は rational singularity" という。便宜上 regular ring も rational singularity のうちに含めてある。" R は rational sing" より, " R は normal か Macaulay 環" が得られる。([T], I, §3).

2次元の rational singularity はかなり研究されているが, dimension が3以上の rational singularity の例はたのもののしか見つからないように思われる。

1°. complete intersection で isolated singularity をもつもの。特に, weighted homogeneous の場合は weight のみにより rational singularity であるかどうかを判定できる。

([B], [W], [V]).

2°. 多項式環又は regular ring の有限群又は reductive 代数群による不変部分環。更に一般には次が知られている。

定理 (Boutot) R を S の部分環, (S は k 上有限生成) R は R 加群として S の直和因子とある。このとき, もし S が rational singularity $\Rightarrow R$ も so.

(この定理がどこに書いているかは知らない。ただ, 近く出るであろう Hochster の Lecture Note の中には含まれると思う。)

3°. X が smooth projective variety, \mathcal{L} が X 上の ample

invertible sheaf, $R = R(X, \mathcal{L}) = \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes n})$ のとき,
 R が rational singularity $\Leftrightarrow H^q(X, \mathcal{L}^{\otimes n}) = 0 \quad \forall q > 0, \forall n \geq 0$.

この証明は, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_X(D)$ と書くとき, §1 の notation で,
 $\Psi: C^+(X, D) \rightarrow \text{Spec}(R)$ が $\text{Spec}(R)$ の resolution である事より
 あきらかである。これから述べるのはこの事実の若干の一般化だが,
 要するに, $C^+(X, D)$ が rational singularity しか持たなければ
 同じ事であると言える。これを定式化すると次のようになる。

定理 3. X を smooth projective variety, $D \in \text{Div}(X, \mathbb{Q})$,
 $D - \lfloor D \rfloor$ が normal crossing しかもたないとする。このとき
 $R(X, D)$ が rational singularity $\Leftrightarrow H^q(X, \mathcal{O}_X(nD)) = 0 \quad (\forall q > 0, \forall n \geq 0)$.

但し $D - \lfloor D \rfloor = \sum \frac{P_i}{Q_i} \cdot V_i$ が $P \in X$ で normal crossing とは,
 $\text{Supp}(D - \lfloor D \rfloor) \supset V_1, \dots, V_s$ が P を通るとき, P の regular param
 system (x_1, \dots, x_d) を $V_i = \{x_i = 0\}$ と P の近くでとれる事である。
 X の各点で normal crossing のとき単に "normal crossing" と言う。

(注) 定理 3 の仮定は次のように弱められる事ができる。

「 X は高々 rational singularity しかもたず, X の特異点の近傍では D は (integral) Cartier divisor, かつ $D - \lfloor D \rfloor$ は normal crossing」.

系. 定理3の仮定の下に, $R(X, D)$ が *rational singularity*
 $\Leftrightarrow R$ が Macaulay 環かつ $a(R) < 0$.

(定理3の証明) $\theta: Y \rightarrow C^+ = C^+(X, D)$ を C^+ の resolution とする。 $\pi = \Psi \circ \theta: Y \rightarrow \text{Spec}(R)$ は $\text{Spec}(R)$ の resolution である。定理3の仮定の下で, C^+ が *toroidal singularity* (単項式たちで生成されるような *normal singularity*) しかもたない事がすぐわかる。*toroidal singularity* は *rational singularity* である ([T], I. §3), $R^q \theta_* (\mathcal{O}_Y) = 0$ ($\forall q > 0$). ゆえに, $R^q \pi_* (\mathcal{O}_Y) \cong R^q \Psi_* (\mathcal{O}_{C^+}) \cong H^q(C^+, \mathcal{O}_{C^+}) \cong \bigoplus_{n \geq 0} H^q(X, \mathcal{O}_X(nD))$. Q.E.D.

例1. $\dim X = 1$ のとき, 定理3の仮定は常にみたされているから, $R(X, D)$ が *rational singularity* $\Leftrightarrow a(R) < 0$.

例2. $X = \mathbb{P}^{d-1}$, H_i ($i=1, \dots, s$) が一般の位置にある超平面とすると, D が H_i たちの (有理係数) 一次結合なら定理3の仮定が成立し, $R(X, D)$ が *rational singularity* $\Leftrightarrow \forall n \geq 0, \deg(\cup D_i) \geq -d+1$. 例えは, p, q を互いに素な^正整数, $ap + bq = 1$, H, H_1, \dots, H_q を一般の位置にある超平面, $D = aH + \sum_{i=1}^q \frac{b}{p} \cdot H_i$ とおくと, $R = R(X, D) \cong k[S, T_1, \dots, T_d] / (S^p - \prod_{i=1}^q \ell_i(T_1, \dots, T_d))$. (T_1, \dots, T_d は \mathbb{P}^{d-1} の同次座標, ℓ_i は H_i の方程式). このとき, $a(R) = pq - dp - q$ であり, R が *rational singularity* $\Leftrightarrow pq - dp - q < 0$.

例 3. (X_1, D_1) と (X_2, D_2) が定理 3 の条件をみたすとき,
 $(X, D) = (X_1 \times X_2, p_1^*(D_1) + p_2^*(D_2))$ もやはり定理 3 の条件をみたす.
 $R(X, D) = R(X_1, D_1) \# R(X_2, D_2)$ (Segre Product, [GW] Chap. 4 参照) である事はすぐわかる. 例えは,
 $R_1 = k[x, y, z]/(x^2 + y^3 + z^7)$ ($\deg x = 21, \deg y = 14, \deg z = 6$),
 R_2 を rational double point (例えは $k[x, y, z]/(xy - z^n)$).
とすると, R_1 は rational singularity でないが, $R_1 \# R_2$ は rational singularity となる.

(注) X が smooth であって, V が悪い singularity をもち, q_V も大きいとき, $D = \sum \frac{p_V}{q_V} \cdot V$ とおいて, $C^+(X, D)$ は rational singularity でない singularity をもつ. しかし, 勿論 " $D - LD_1$ は normal crossing" という条件は, $C^+(X, D)$ が rational singularity となるための必要条件ではない.

(注) ある graded ring の各 homogeneous element に対する degree の与え方は unique でない (例えは $R = R'[X]$ という形のとき X の degree は自由に指定できる.) しかし, R が孤立特異点の時は degree の与え方はかなり制限されるように思える. 例えは次のような事は成立しないだろうか?

問題 R が孤立特異点をもつ Macaulay graded ring のとき,
 R が rational singularity $\Leftrightarrow a(R) < 0$ (?)

REFERENCES.

- [B] Burns, D.: On rational singularities in dimensions > 2 . Math. Ann. 211, 237-244 (1978).
- [D] Demazure, M.: Anneaux gradues normaux, C.N.R.S. 169, Mai 1979.
- [GW] Goto, S. and Watanabe, K.: On graded rings, I. J. Math. Soc. Japan, 30, 179-213 (1978).
- [HR] Hochster, M. and Roberts, J.L.: Rings of Invariants of reductive groups acting on regular rings are Cohen-Macaulay, Adv. in Math. 13, 115-175 (1974).
- [M] Mori, S.: Graded factorial domains, Japan. J. Math. 3, 223-238, (1977).
- [P] Pinkham, H.: Normal surface singularities with C^* -action. Math. Ann. 227, 183-193 (1977).
- [S] Samuel, P.: Lectures on Unique Factorization Domains. Tata Inst. Fund. Res., Bombay, 1964.
- [T] Kempf, G., Knudsen, F., Mumford, D. and Saint-Donat, B.: Toroidal Embeddings I, Lecture Notes in Math. 339, Springer 1973.
- [V] Viehweg, E.: Rational singularities of higher dimensional schemes. Proc. A.M.S., 63, 6-8, (1977).
- [W] Watanabe, Kimio: On plurigenera of normal isolated singularities, I. (in preprint).